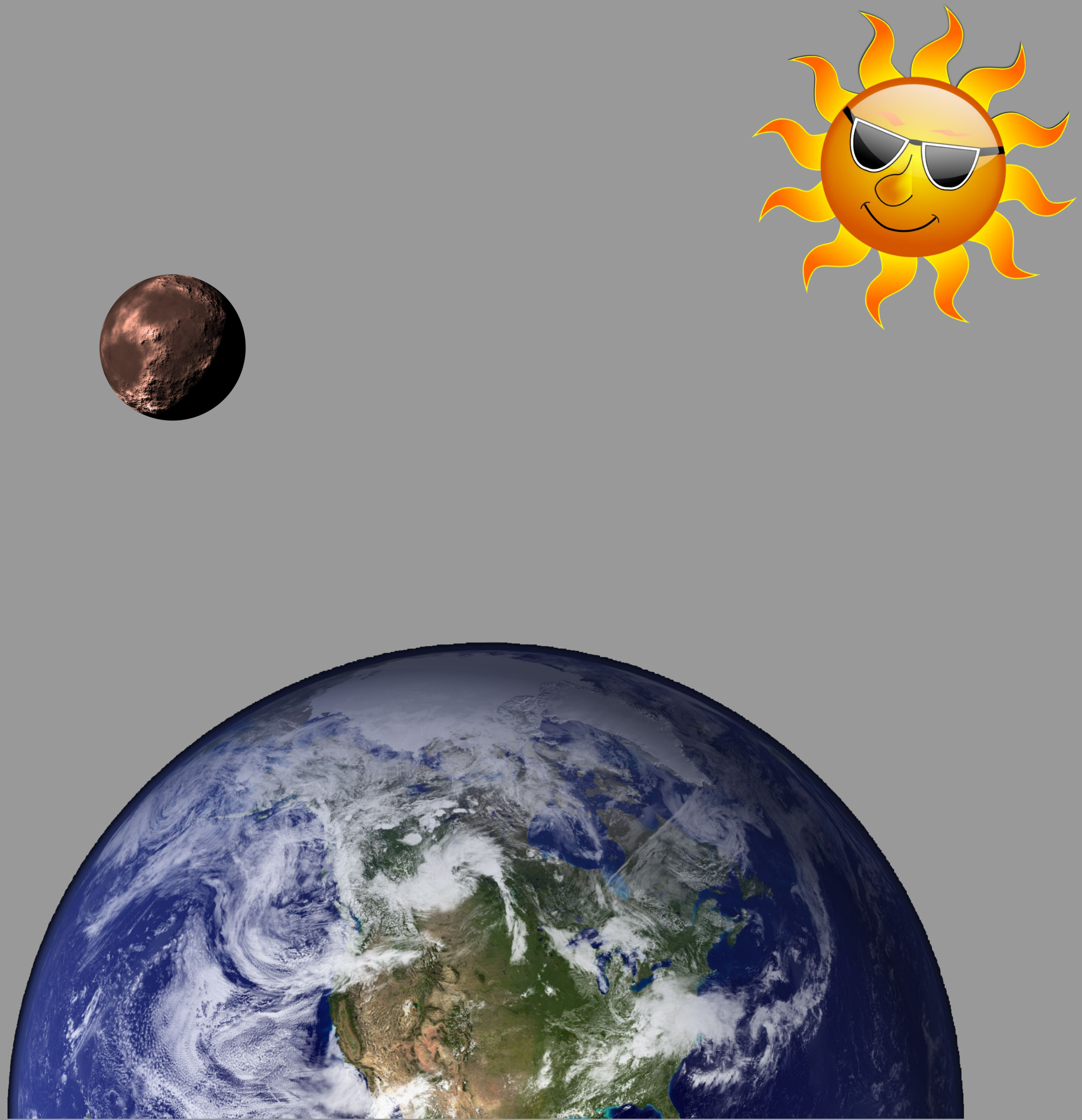
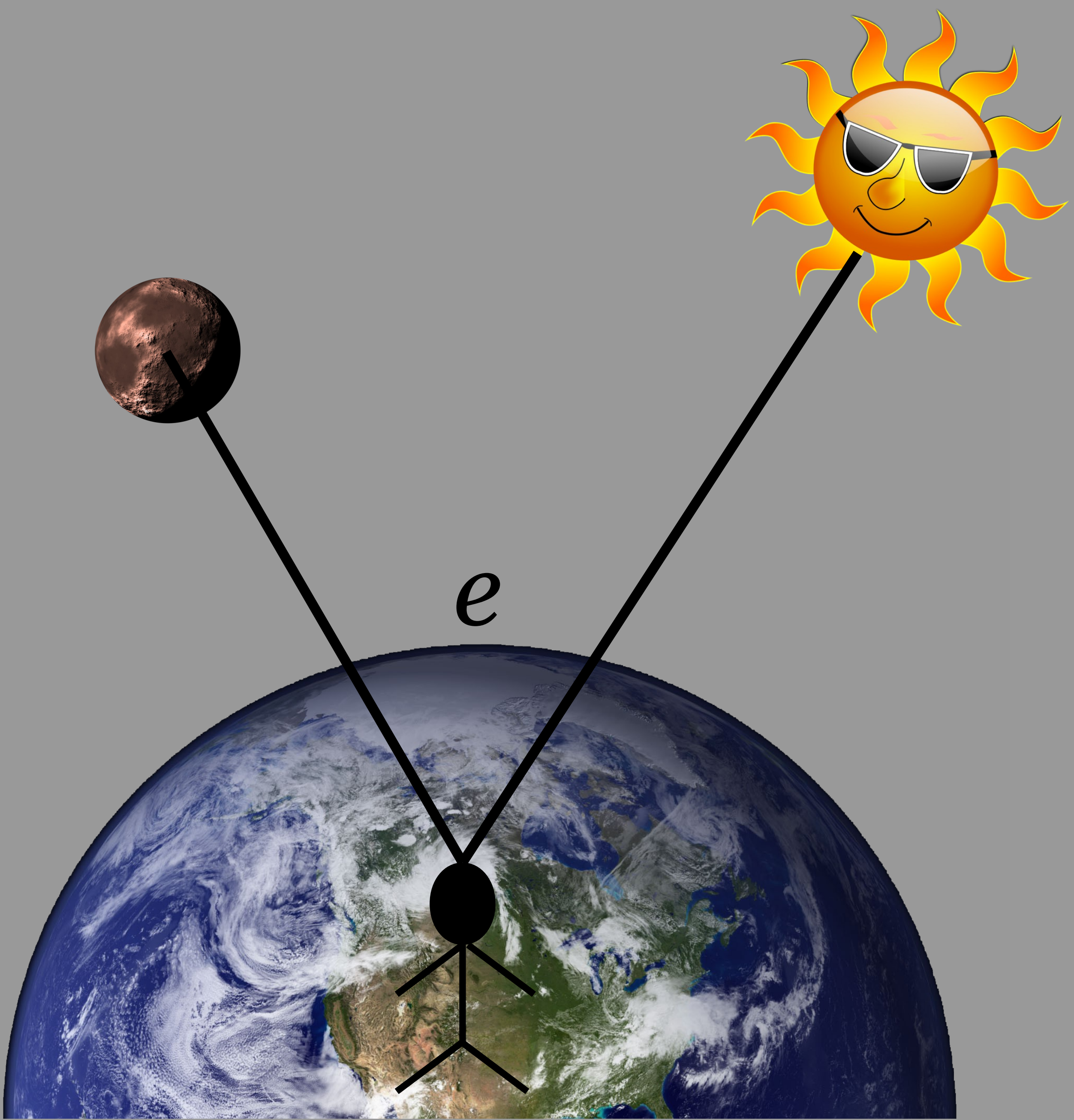
As Leis de Kepler

e Interações no Sistema Solar

Configurações Planetárias

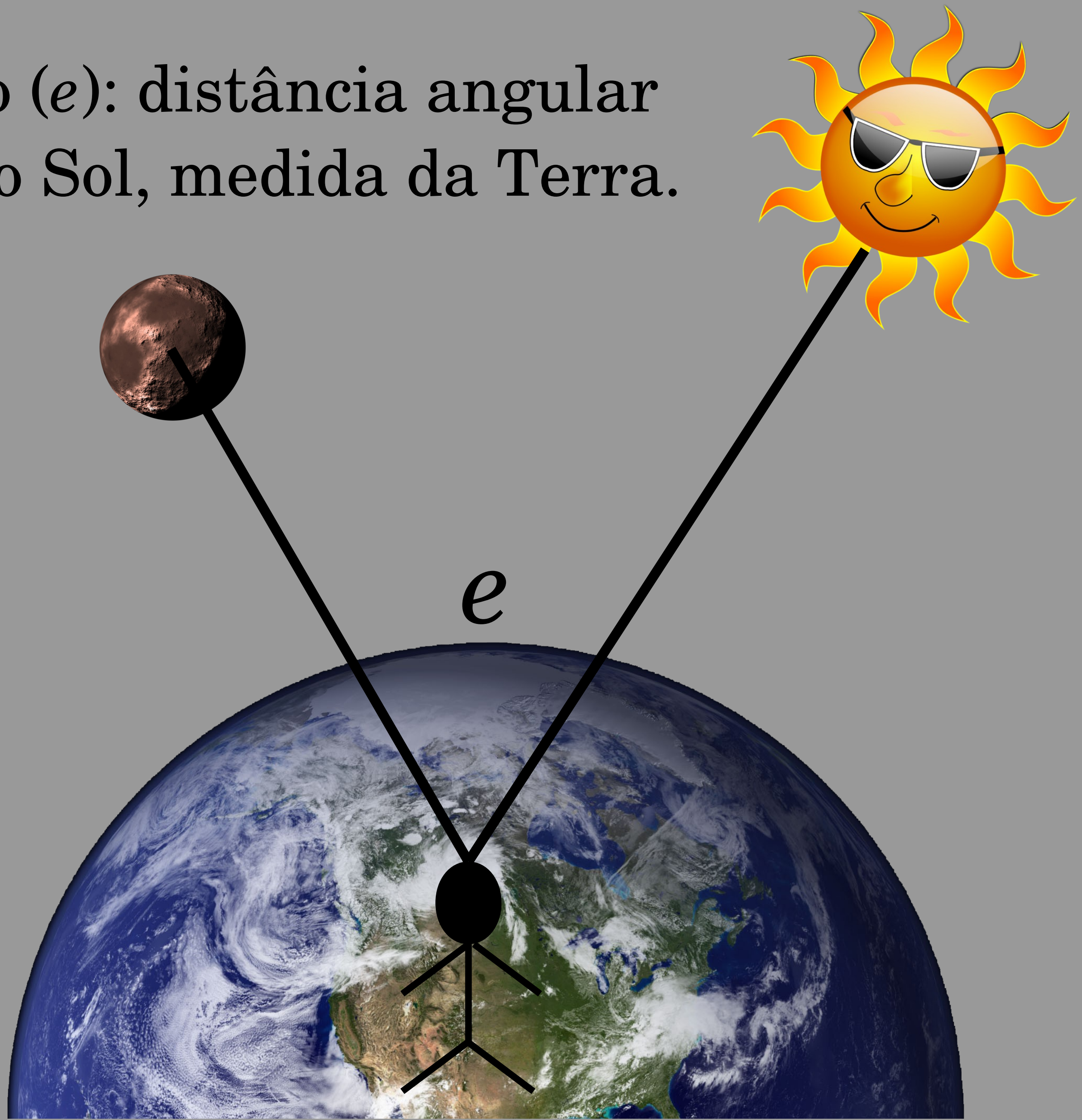


Configurações Planetárias



Configurações Planetárias

→ Elongação (e): distância angular do planeta ao Sol, medida da Terra.

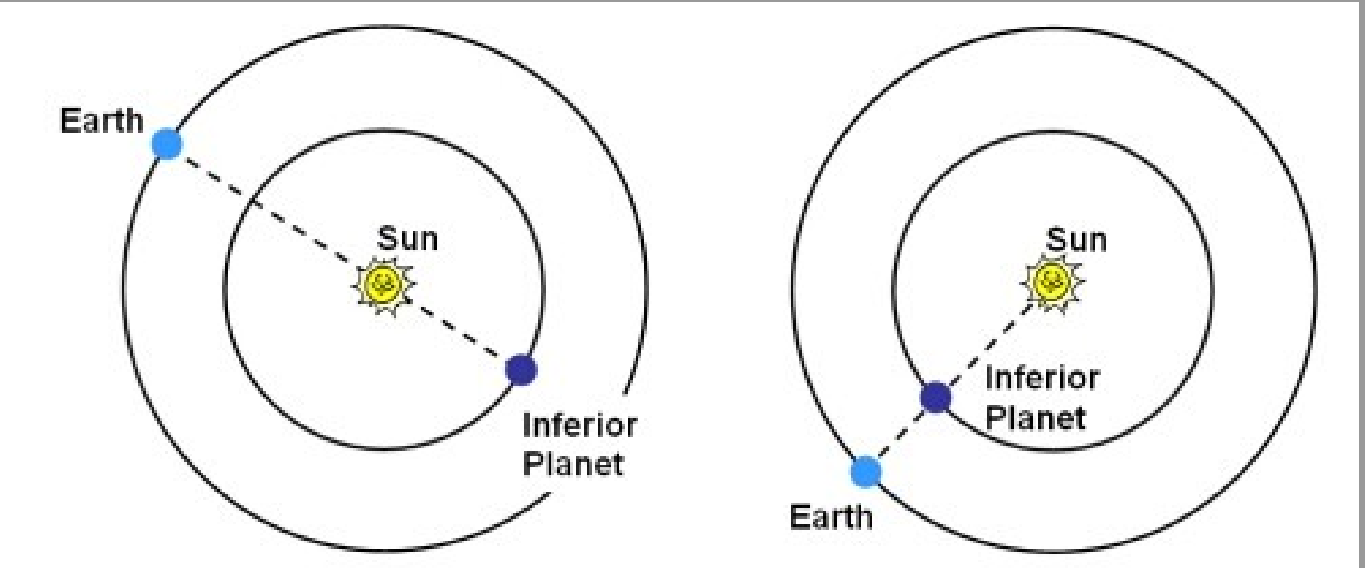


Configurações Planetárias

Planetas inferiores: Mercúrio e Vênus
(mais perto do Sol)

→ Conjunção inferior: planeta na mesma direção do Sol (e=0) e mais ***próximo*** da Terra do que ele.

→ Conjunção superior: planeta na mesma direção do Sol (e=0) e mais ***longe*** da Terra do que ele.



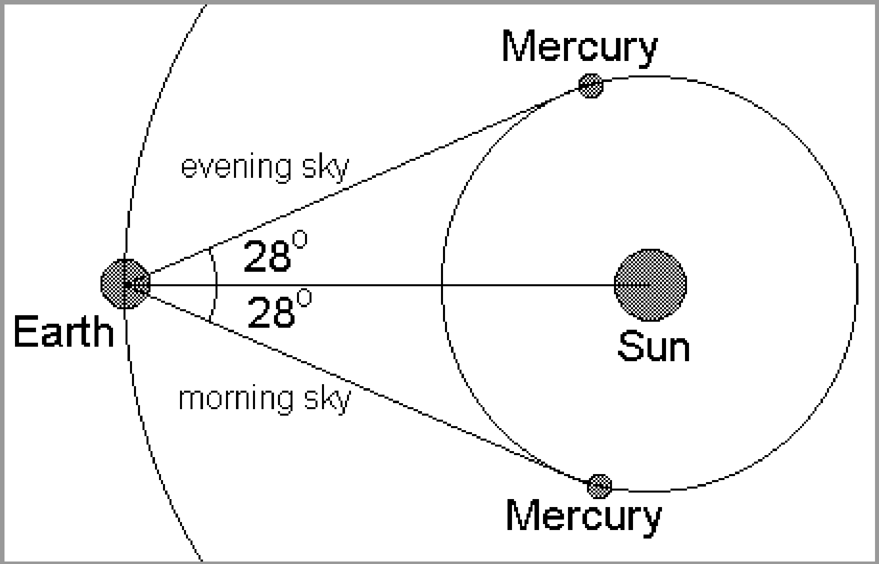
Trânsito de Vênus

Configurações Planetárias

Planetas inferiores: Mercúrio e Vênus
(mais perto do Sol)

→ Elongação Máxima Ocidental: planeta a ***oeste*** do Sol (nasce e se põe antes dele = visível ao amanhecer).

→ Elongação Máxima Oriental: planeta a ***leste*** do Sol (nasce e se põe depois dele = visível ao anoitecer).

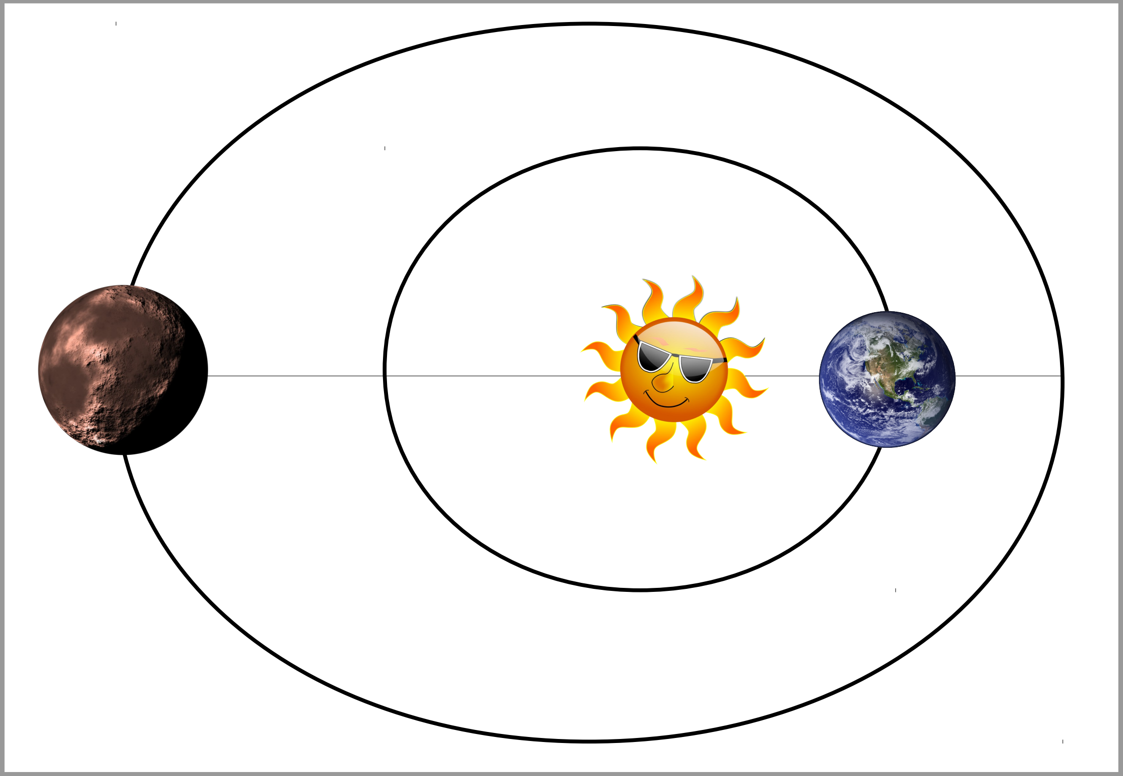


* Vênus = 48 °

Configurações Planetárias

Planetas superiores: mais distantes do Sol

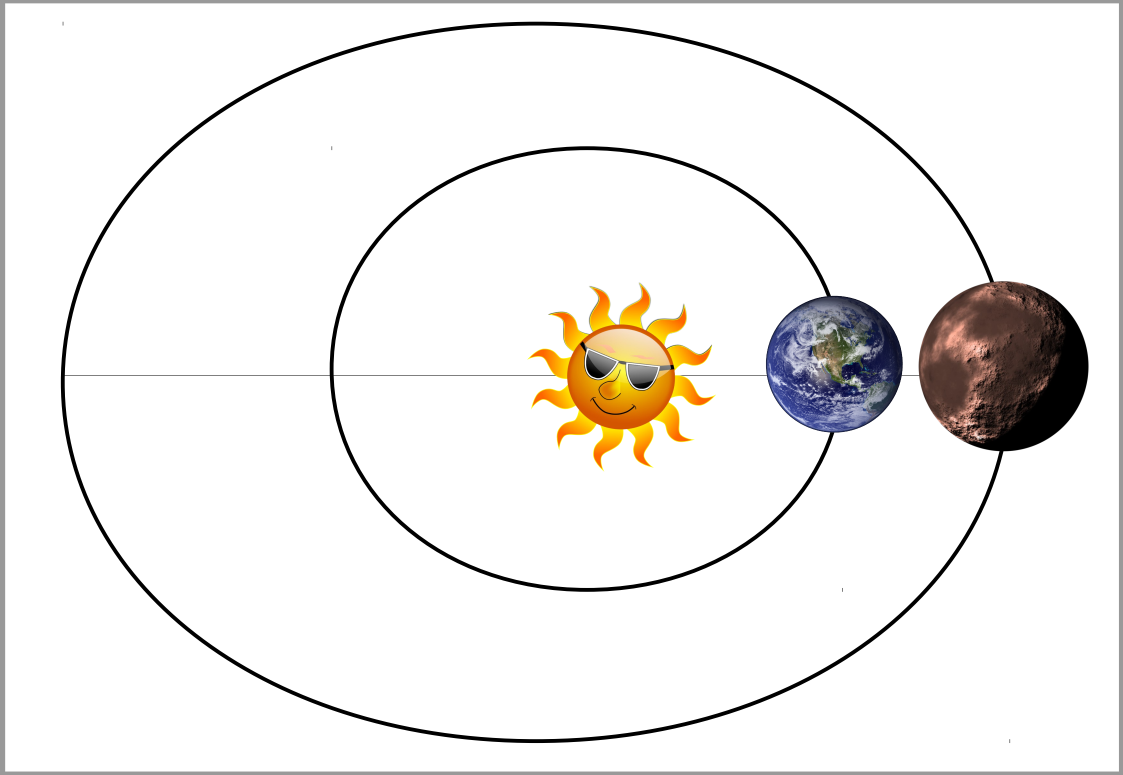
→ Conjunção: mesma direção do Sol (e=0) e mais longe da Terra.



Configurações Planetárias

Planetas superiores: mais distantes do Sol

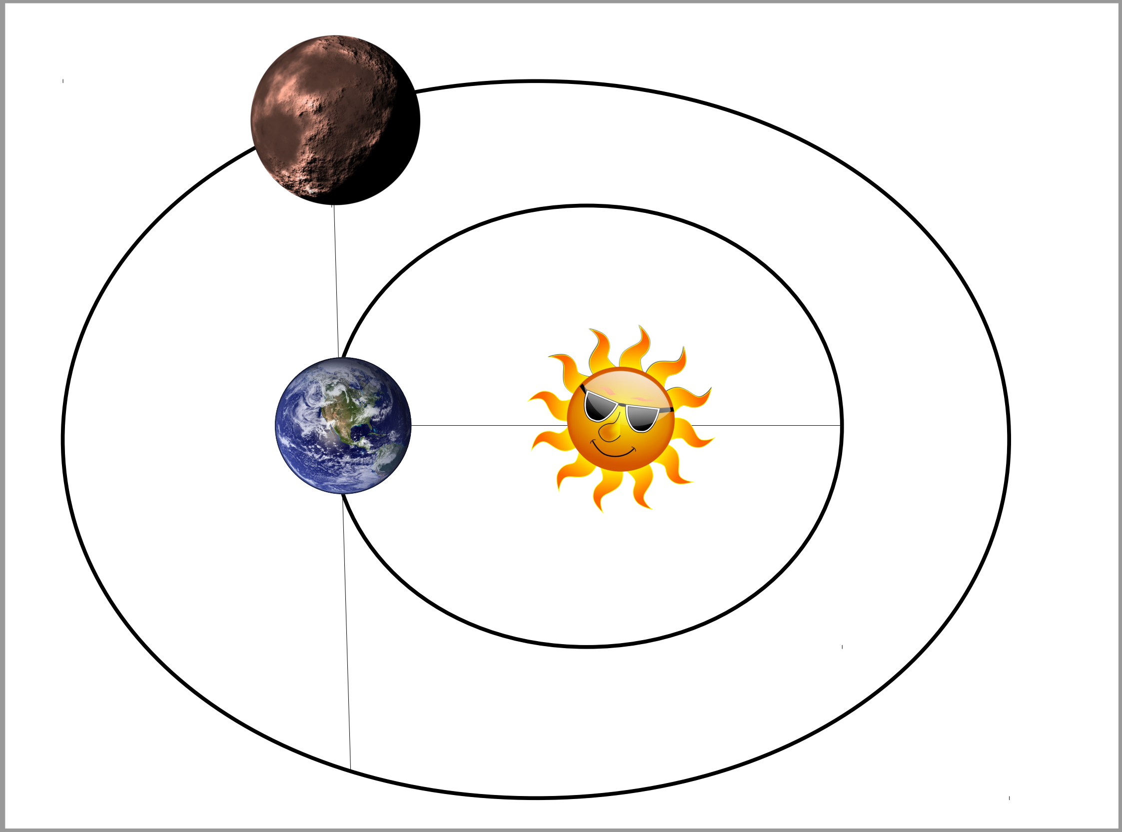
→ Oposição: planeta na direção oposta ao Sol (e=180°). Visível durante toda a noite.



Configurações Planetárias

Planetas superiores: mais distantes do Sol

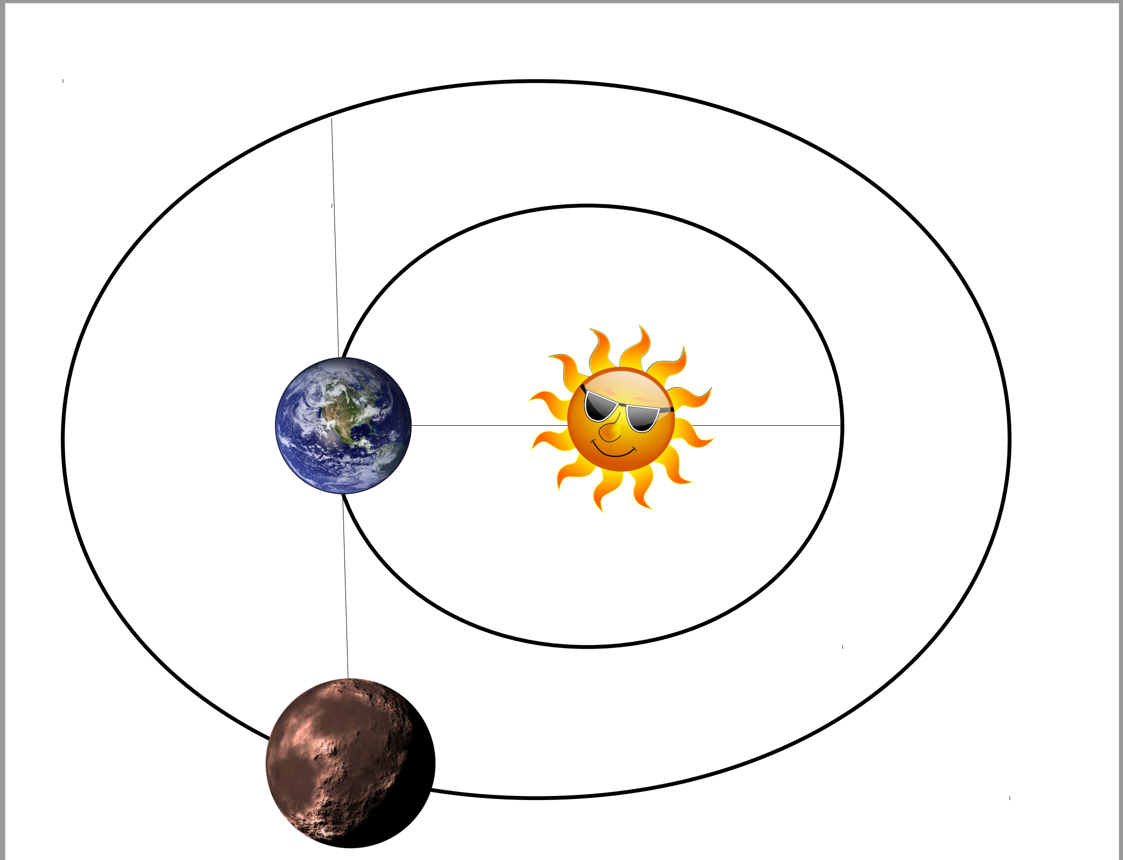
→ Quadratura Ocidental: e=90°, planeta 6h a oeste do Sol.



Configurações Planetárias

Planetas superiores: mais distantes do Sol

→ Quadratura Oriental: e=90°, planeta 6h a leste do Sol.



Períodos dos Planetas

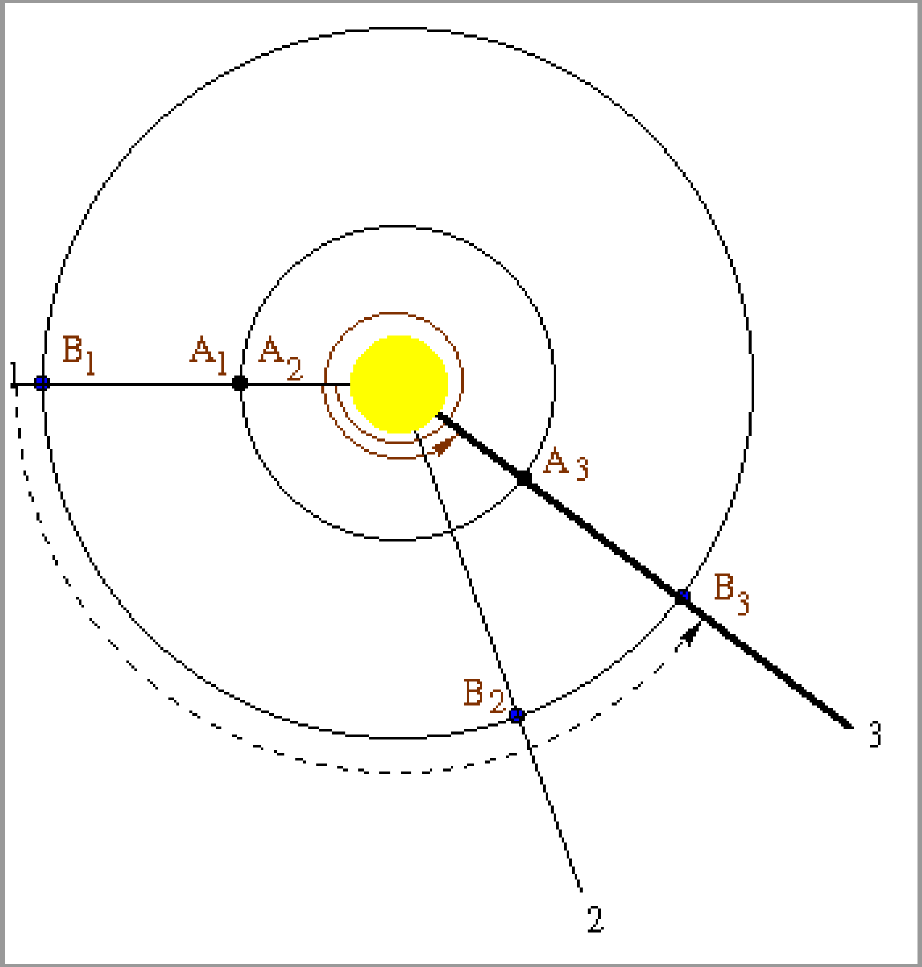
→ Período Sinódico (S):

É o intervalo de tempo entre duas configuraçãoes iguais consecutivas. É o período de translação ***aparente*** do planeta em relação à Terra.

→ Período Sideral (P):

É o período ***real*** de translação do planeta em torno do Sol, com relação a uma estrela fixa.

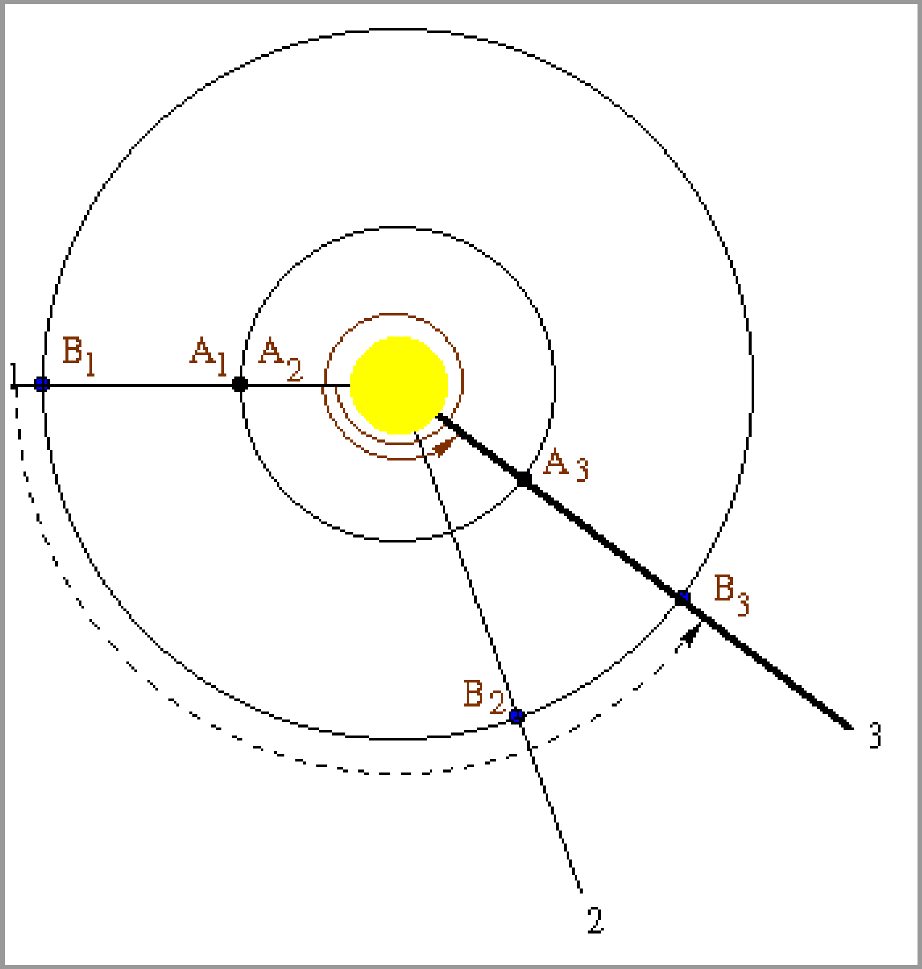
Períodos dos Planetas



Planeta interior: desloca-se $360°/P_i$ por dia.

Planeta exterior: desloca-se $360°/P_e$ por dia.

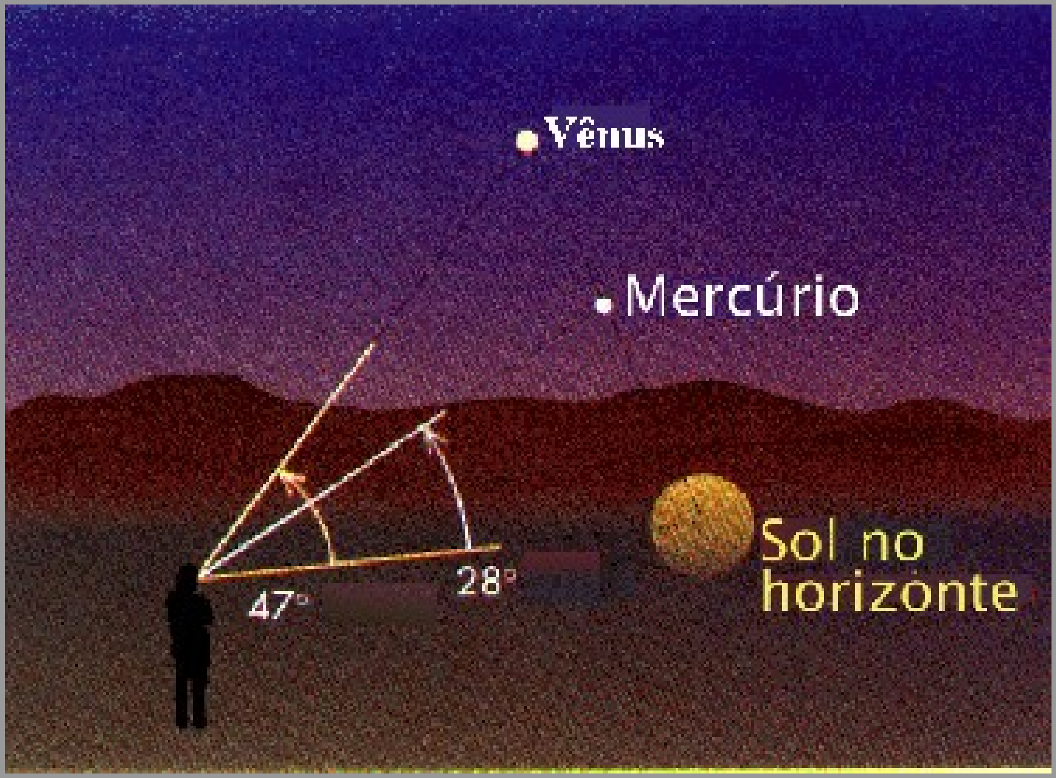
Períodos dos Planetas



$$\frac{1}{S}=\frac{1}{P_i}-\frac{1}{P_e}$$

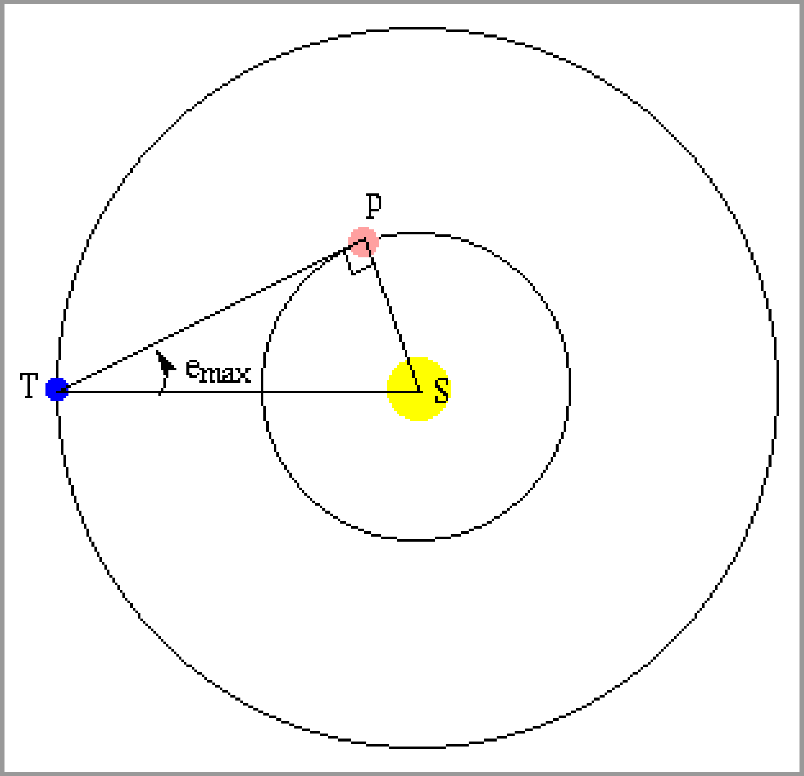
Distâncias no Sistema Solar

→ Planeta inferior em elongação máxima: Terra, Sol e planeta formam triângulo retângulo.



Distâncias no Sistema Solar

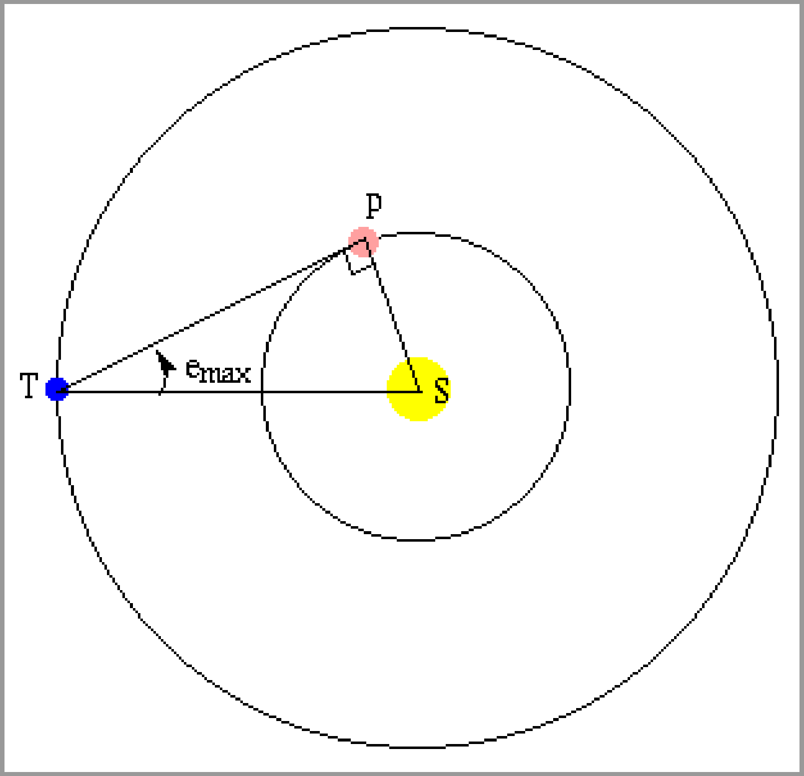
→ Planeta inferior em elongação máxima: Terra, Sol e planeta formam triângulo retângulo.



$$sen(e) = \frac{distância_{(planeta - Sol)}}{distância_{(Terra - Sol)}}$$

Distâncias no Sistema Solar

→ Planeta inferior em elongação máxima: Terra, Sol e planeta formam triângulo retângulo.



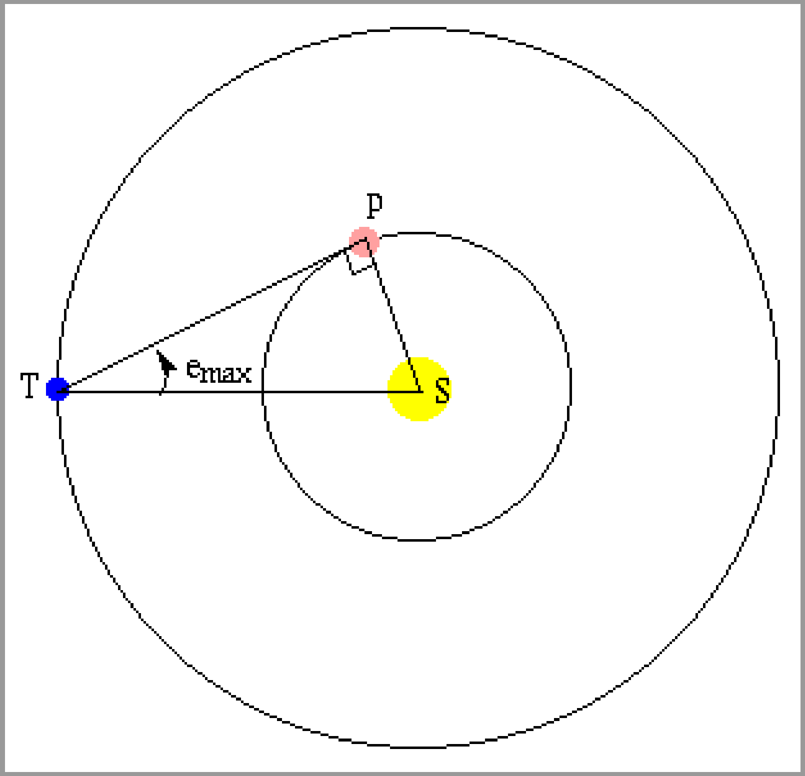
$$sen(e) = \frac{distância_{(planeta - Sol)}}{distância_{(Terra - Sol)}}$$

Mercúrio: 28° → 0.47 UA

Vênus: 48° → 0.74 UA

Distâncias no Sistema Solar

→ Planeta inferior em elongação máxima: Terra, Sol e planeta formam triângulo retângulo.



$$sen(e) = \frac{distância_{(planeta - Sol)}}{distância_{(Terra - Sol)}}$$

Mercúrio: 28° → 0.47 UA

Vênus: 48° → 0.74 UA

* Método utilizado por Copérnico

Distâncias no Sistema Solar

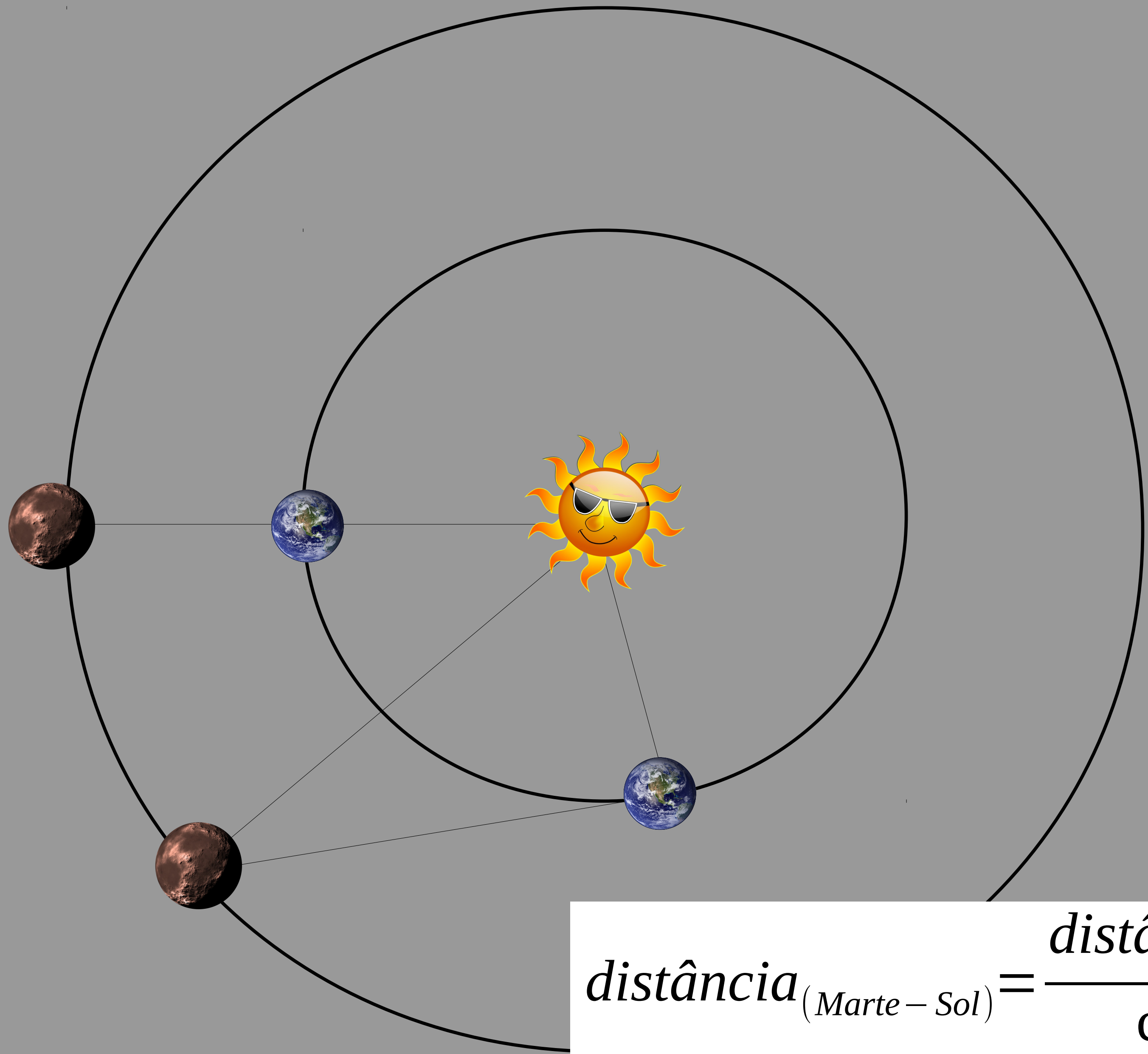
→ Planeta exterior:
Exemplo: Marte

Tempo entre oposição e quadratura: 106 dias
Terra percorre: $106/365 \times 360° \approx 104°$

Período sideral de Marte: 687 dias
Marte percorre: $106/687 \times 360° \approx 55°$

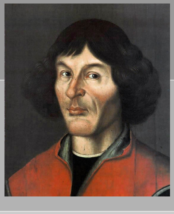
Ângulo entre Terra e Marte, visto do Sol: $104° - 55° = 49°$

Distâncias no Sistema Solar



$$distância_{(Marte-Sol)} = \frac{distância_{(Terra-Sol)}}{\cos(49°)}$$

Distâncias no Sistema Solar

Planeta	**Copérnico** 	**Moderno**
Mercúrio	0.380	0.387
Vênus	0.720	0.723
Terra	1.000	1.000
Marte	1.520	1.520
Júpiter	5.220	5.200
Saturno	9.170	9.540

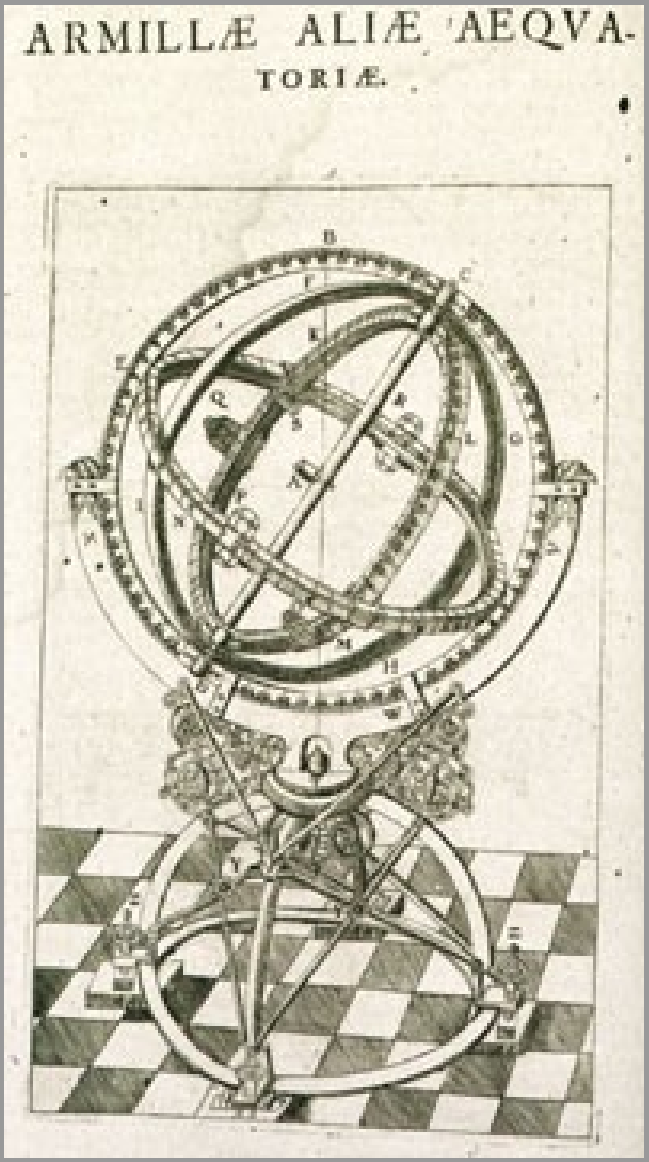
Observações de Tycho Brahe

→ Fez extensivas observações das posições de planetas e estrelas com precisão de ordem de 1';

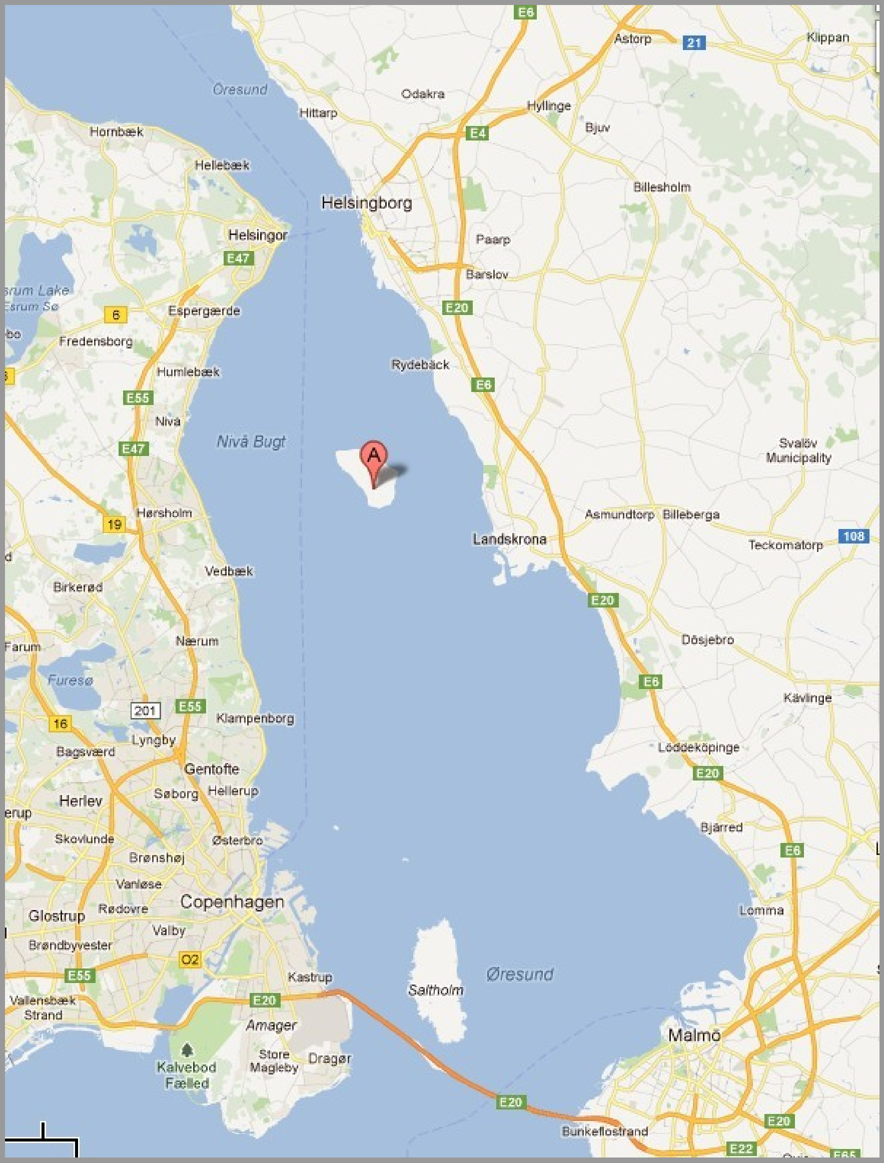
→ Desenvolveu e utilizou quatro tipos diferentes de esferas armilares;

→ Poderia medir diretamente as coordenas eclípticas ou equatoriais dos objetos celestes com as esferas;

→ Outros instrumentos mediam coordenas azimutais



Observações de Tycho Brahe



→ Maior esfera: 2.6 m de diâmetro!

Maior fonte de erro (segundo ele mesmo): flexão e deslocamento dos círculos devido a seu peso.

→ Foi patrocinado pelo Rei Frederic II da Dinamarca e pôde construir seu observatório na ilha de Hven (entre Dinamarca e Suécia);

Observações de Tycho Brahe

Observações de Tycho Brahe

Observações de Tycho Brahe

Observações de Tycho Brahe

→ Após a morte do rei, perdeu seus privilégios e foi trabalhar como astrônomo da corte para o imperador da Bohemia, em Praga.

Johannes Kepler

→ Matemático contratado por Tycho Brahe em 1600 para ajudá-lo na análise dos dados compilados ao longo de 20 anos.

→ Inicialmente, estudava para ser teólogo;

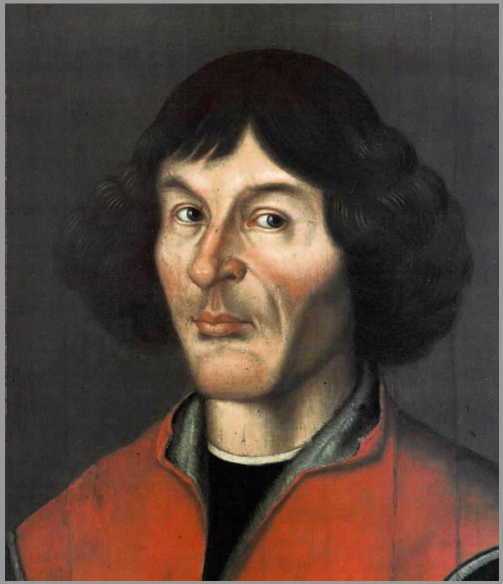
→ Na faculdade, conheceu o trabalho de Copérnico e tornou-se defensor do heliocentrismo, *sem* abandonar suas convicções religiosas.

Johannes Kepler

→ À época, Astronomia e Astrologia eram consideradas relacionadas, mas Astronomia e Física não!

→ Herdou os dados de Tycho Brahe após a morte dele (1601) e dedicou-se a estudá-los por cerca de 20 anos.

Copérnico



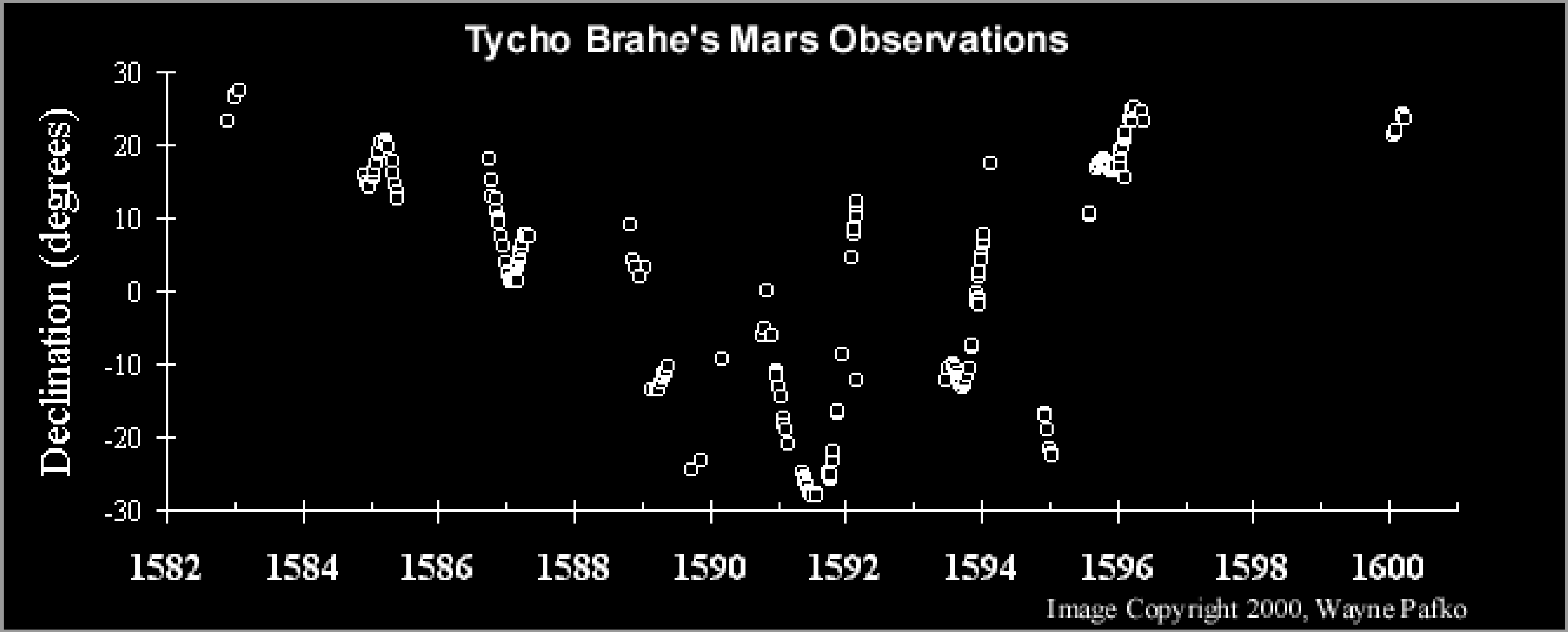
1. As órbitas planetárias são círculos;

2. O Sol está no centro das órbitas;

3. A velocidade do planeta ao longo da órbita é constante.

Johannes Kepler

→ Planeta para o qual existiam mais dados: Marte.



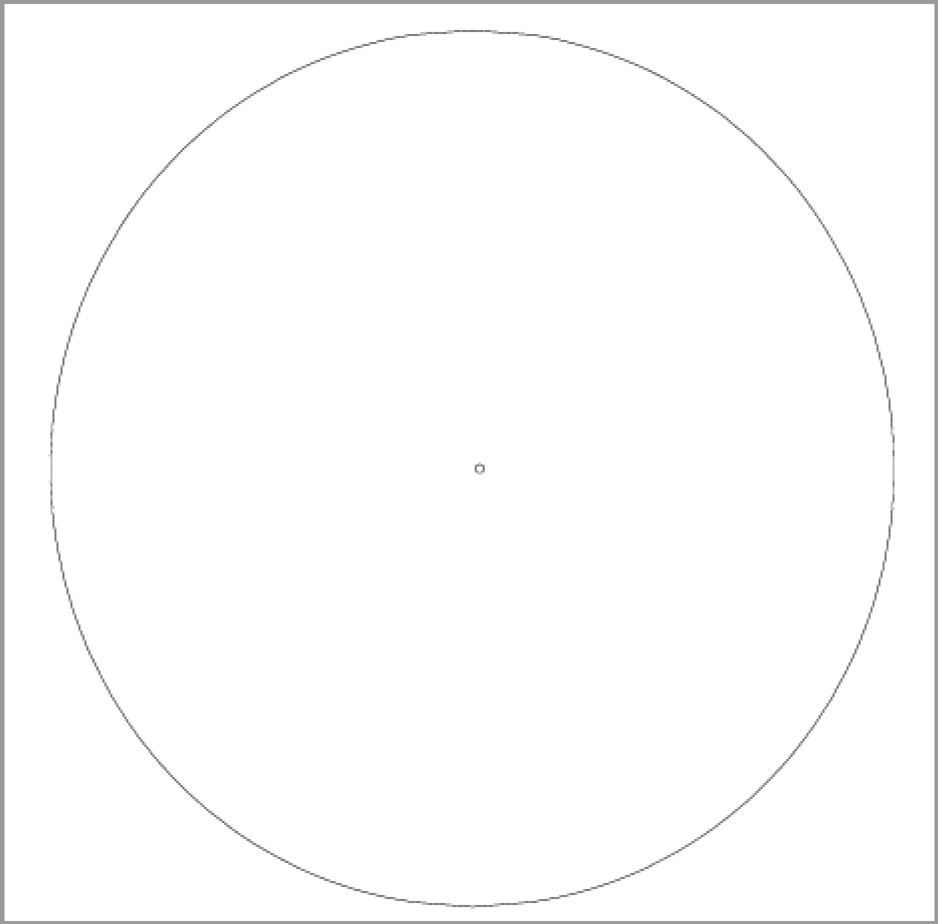
http://www.pafko.com/tycho/data.gif

Johannes Kepler

→ Pôde determinar a posição da Terra após cada período sideral de Marte e, assim, traçar sua órbita: círculo com o Sol um pouco deslocado do centro.

Johannes Kepler

→ Pôde determinar a posição da Terra após cada período sideral de Marte e, assim, traçar sua órbita: círculo com o Sol um pouco deslocado do centro.



Johannes Kepler

→ Calculou também a órbita de Marte, mas não pôde ajustá-la com um círculo;

→ Insistiu nisso por anos e encontrou um órbita que ajustava as observações com um erro de 8' (¼ do diâmetro do Sol);

→ Não acreditava que as observações de Tycho Brahe pudessem ter um erro dessa ordem, então descartou a possibilidade de ela ser circular.

Johannes Kepler

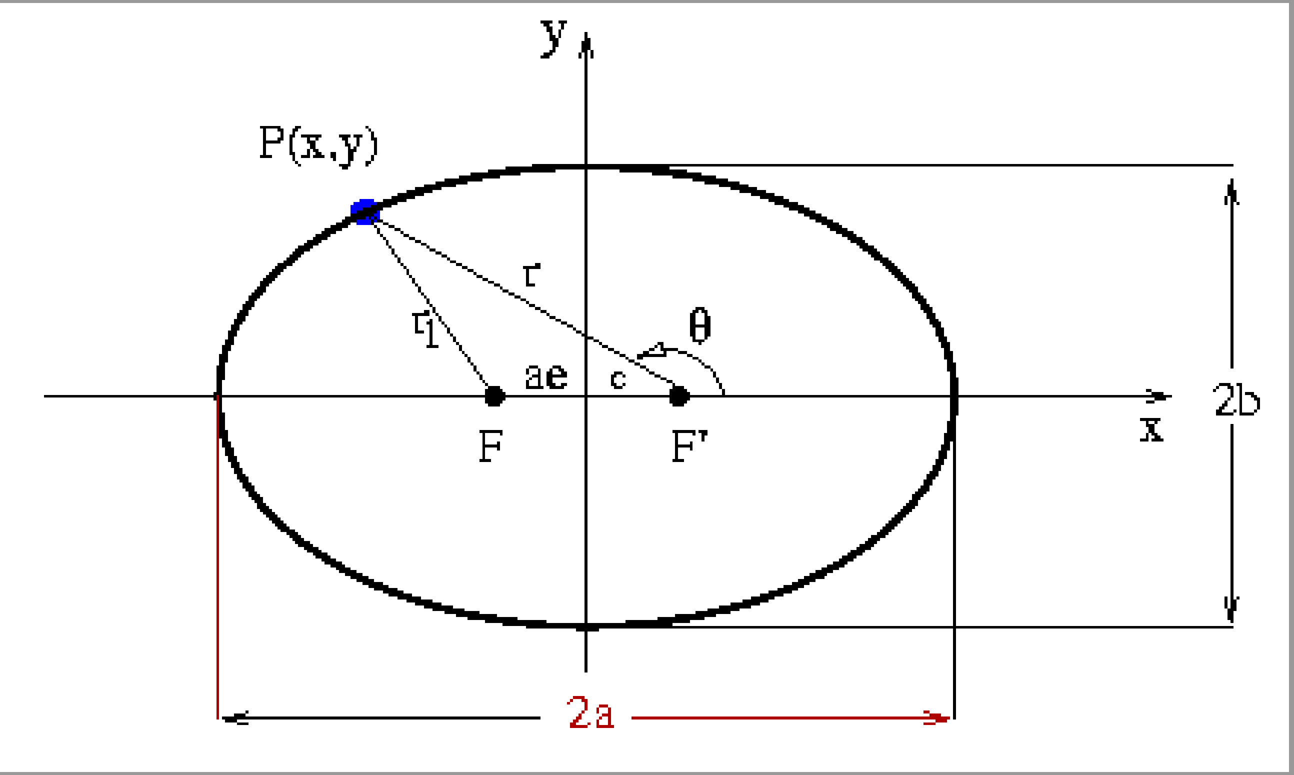
→ Passou a tentar ajustá-la com uma elipse e teve sucesso;

→ A posição do Sol coincidia com um dos focos da elipse.

Johannes Kepler

→ Passou a tentar ajustá-la com uma elipse e teve sucesso;

→ A posição do Sol coincidia com um dos focos da elipse.



Elipses: propriedades

→ Para um ponto P qualquer sobre a curva, a soma das suas distâncias aos dois focos, F e F', é constante:

FP + FP' = constante = 2a

→ Quanto mais a distância entre os focos, maior é a excentricidade *e*. Sendo *c* a distância do centro a cada foco, é definida por:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

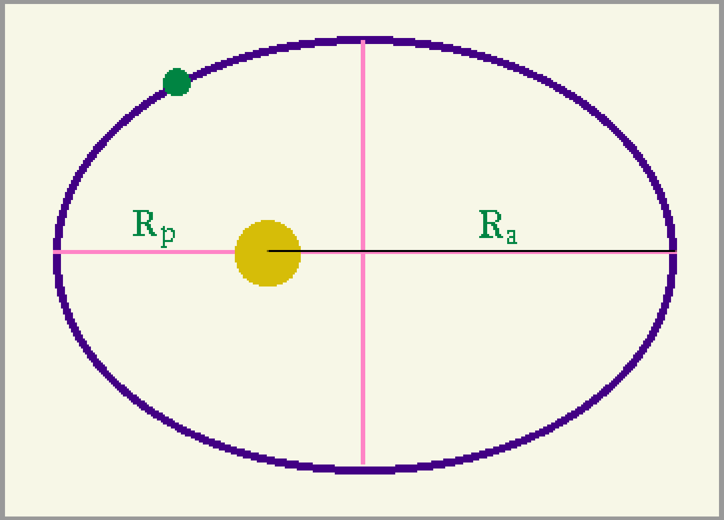
Elipses: propriedades

→ Ponto mais próximo ao Sol: periélio

$$R_p = a - c = a - ae = a(1 - e)$$

→ Ponto mais distante do Sol: afélio

$$R_p = a + c = a + ae = a(1 + e)$$



Leis de Kepler

1. Lei das órbitas elípticas (Astronomia nova, 1609):

A órbita de cada planeta é uma elipse, com o Sol em um dos focos. Como consequência da órbita ser elíptica, a distância do Sol ao planeta varia ao longo de sua órbita.

Leis de Kepler

→ Segundo as crenças religiosas de Kepler, o Sol era a fonte de *força motriz* no Sistema Solar;

→ Ela acreditava que a potência motriz irradiada pelo Sol diminuia com a distância, de modo que os planetas moviam-se com velocidades maiores quando se aproximavam dele e menores quando estavam mais longe.

Leis de Kepler

→ Baseado nisso, Kepler formulou uma lei em que a taxa de movimento de um planeta era inversamente proporcional à sua distância ao Sol;

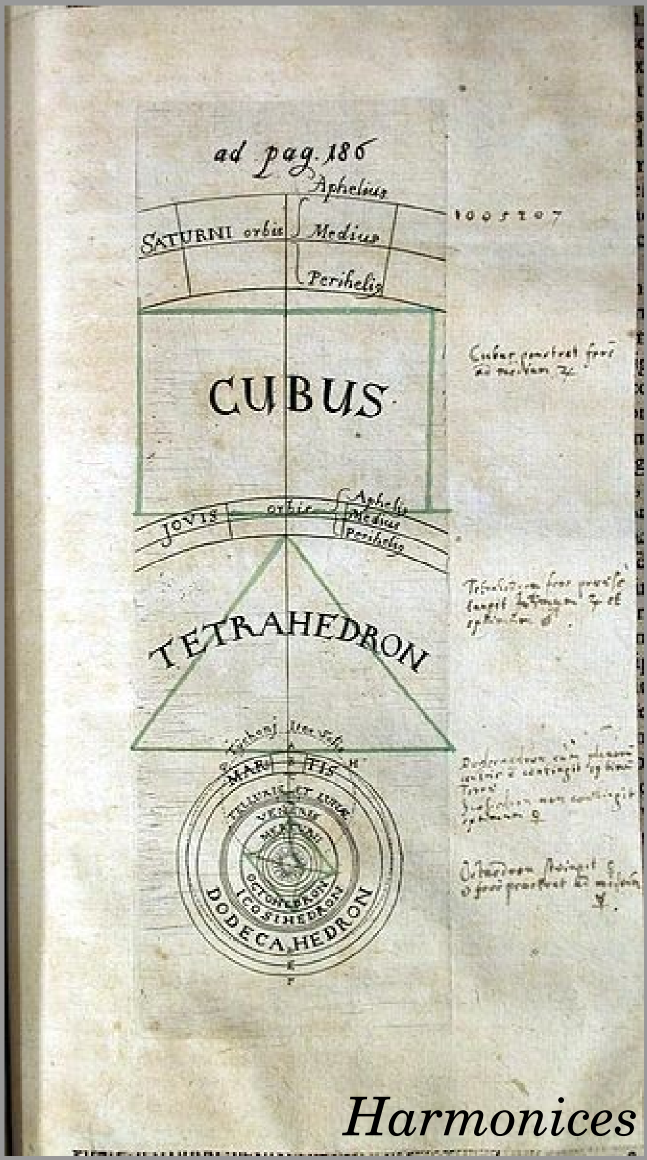
→ Achou difícil verificá-la ao longo do ciclo orbital, pois muitas cálculos eram necessários, então a reformulou em termos geométricos, considerando a velocidade com que *áreas* eram descritas.

Leis de Kepler

2. Lei da áreas (Astronomia nova, 1609):

A reta unindo o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais: a *velocidade areal* é constante. Portanto, a velocidade orbital não é uniforme, mas varia de forma regular: quanto mais distante o planeta está do Sol, mais devagar ele se move.

Leis de Kepler



Harmonices Mundi, 1619

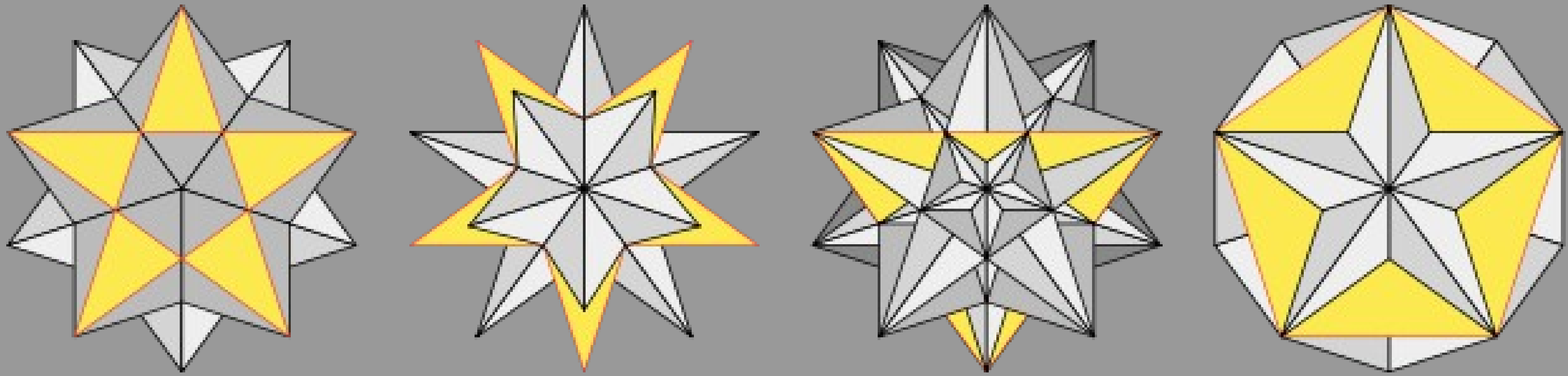
→ Outro interesse de Kepler, e de muitos outros cientistas e filósofos, era em formas harmônicas;

→ Muito do aspecto harmônico era estudado e justificado por meio da música.

Leis de Kepler

→ Kepler estudou sólidos e polígonos regulares e daí extendeu suas análises à música, meteorologia e astrologia;

→ A harmonia era considerada resultado dos “tons” emitidos pelas “almas dos corpos celestes”. A Astrologia era justificada em termos das interações entre esses tons e a alma.



Leis de Kepler

→ Kepler também tentou estender esses conceitos ao movimento planetário buscando relações entre velocidade orbital e distância ao Sol;

→ Outros astrônomos também tentaram obter relações desse tipo, mas seus datos eram muito menos precisos do que os dados a que Kepler tinha acesso, obtidos por Tycho;

→ Após tentar várias combinações diferentes, ele obteve o que ficou conhecido como a 3ª Lei de Kepler (mas os detalhes de como ele chegou a tal conclusão são desconhecidos.

Leis de Kepler

3. Lei harmônica
(Epitome astronomiae Copernicanae, 1618):

O quadrado do período orbital dos planetas é diretamente proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol. Assim, planetas com órbitas maiores se movem mais lentamente em torno do Sol (isso implica que a força entre o Sol e o planeta decresce com a distância ao Sol).

$$P^2 = Ka^3$$

Leis de Kepler

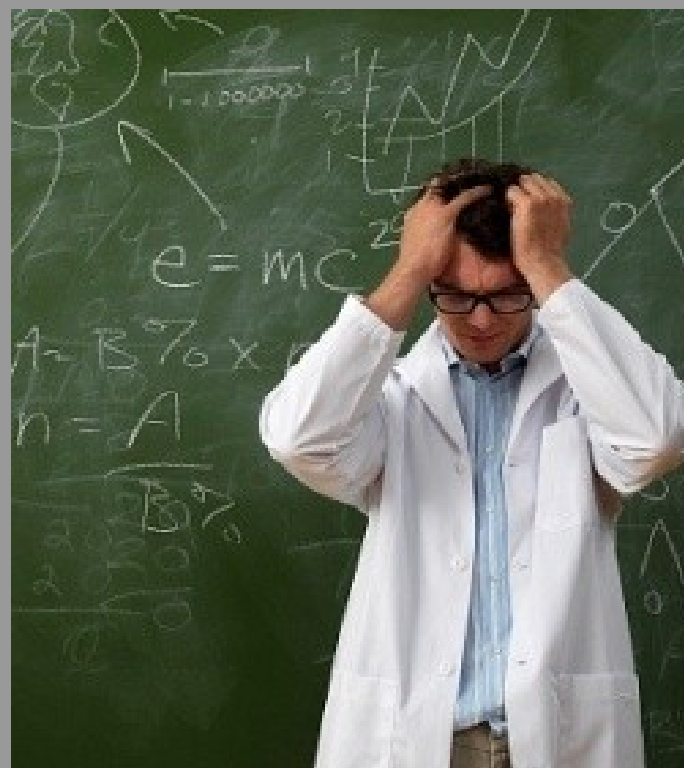
1. Cada planeta orbita em torno do Sol em uma órbita elíptica, com o Sol ocupando um dos focos da elipse;

2. A linha reta que une o Sol ao planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais;

3. Os quadrados dos períodos orbitais dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores das órbitas ($P^2=Ka^3$).

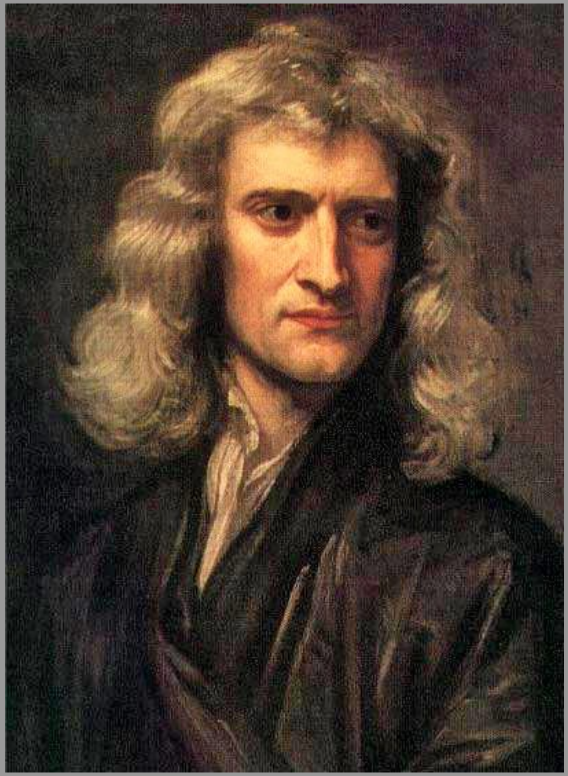
Leis de Kepler

Por quê?

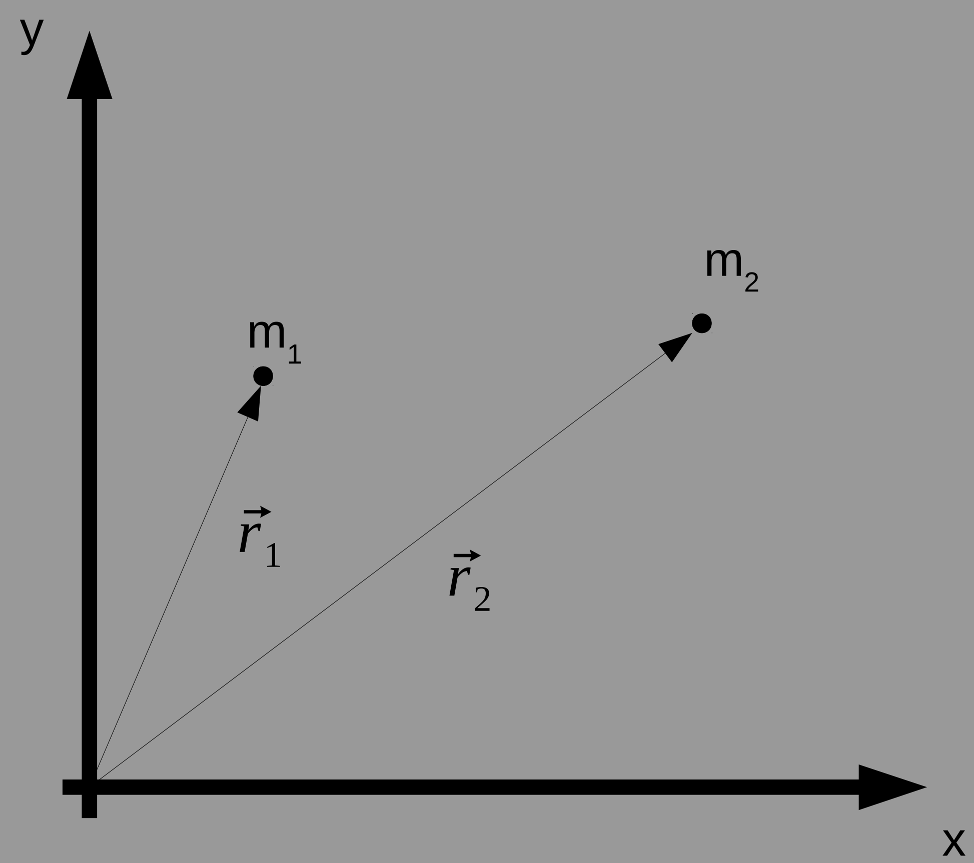


Leis de Kepler

$$\vec{F} = \frac{-G\, m_1\, m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)$$



Equação de Movimento



Sistema de coordenadas original

Equação de Movimento

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \frac{-G m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \frac{-G m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Equação de Movimento

Subtraindo: $$\frac{d^2(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{dt^2}=\frac{-G(m_1+m_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

Somando: $$\frac{d^2(m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2)}{dt^2}=\frac{G(m_1+m_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}\vec{0}$$

Equação de Movimento

Mudança de coordenadas:

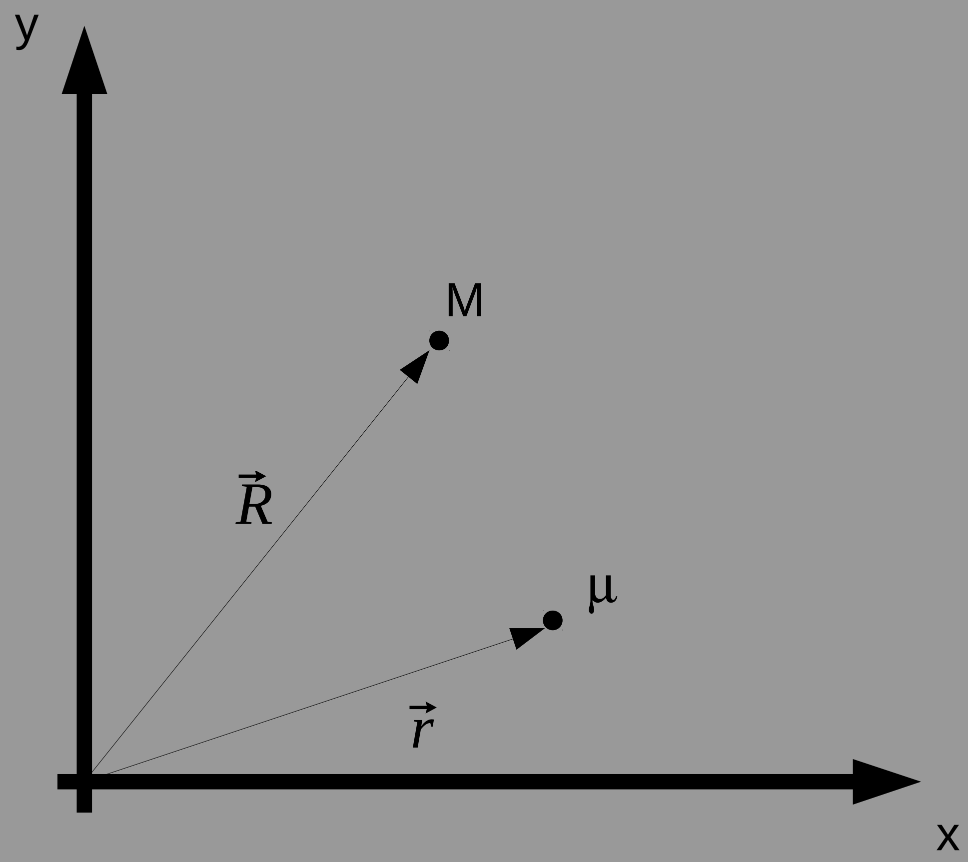
$$\vec{R} = \vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$M = m_1 + m_2$$

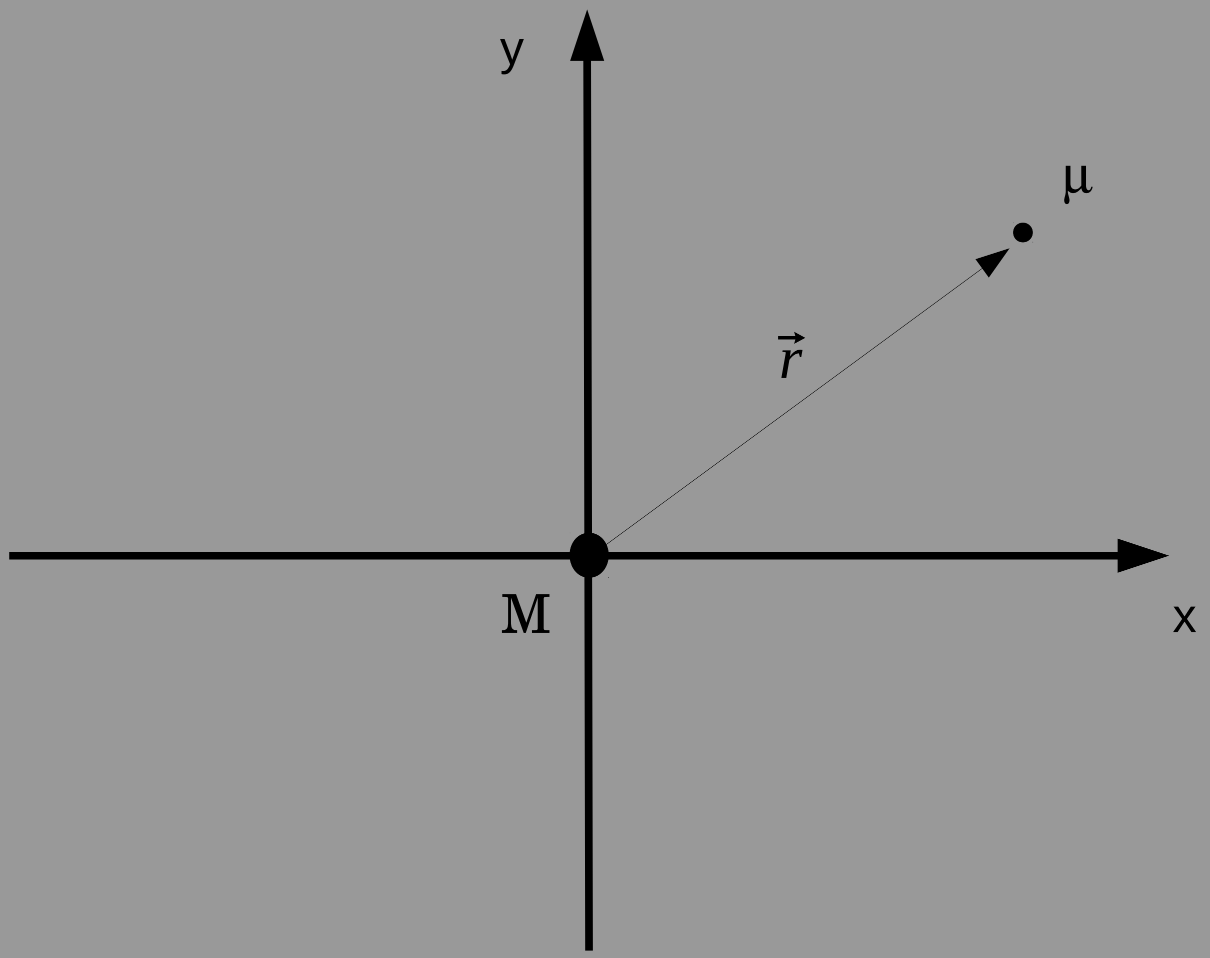
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m1 + m2}$$

Equação de Movimento



Sistema transformado

Equação de Movimento



Fazendo $\vec{R} = 0$ por conveniência

Equação de Movimento

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{-GM}{r^3}\,\vec{r}$$

Equação de Movimento

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{-GM}{r^3}\vec{r}$$

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{GM}{r^3}\vec{r} = 0}$$

1ª Lei de Kepler

Resolvendo a equação de movimento, obtém-se:

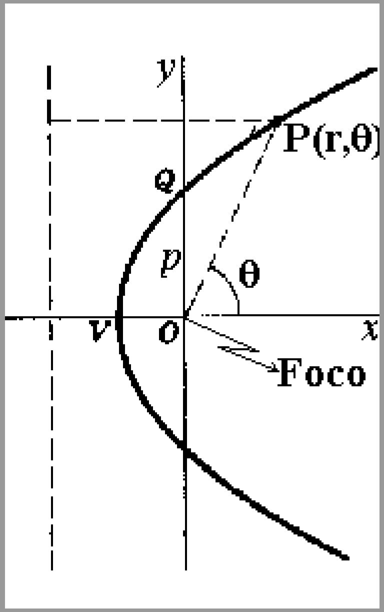
$$r = \frac{\dfrac{L^2}{GM}}{1 + \dfrac{C}{GM}\cos(\phi)}$$

$\vec{L}$ = momento angular

$\vec{C}$ = vetor dependendo das condições iniciais

ϕ = ângulo entre $\vec{L}$ e $\vec{C}$

1ª Lei de Kepler



Equação para a cônica!

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\phi)}$$

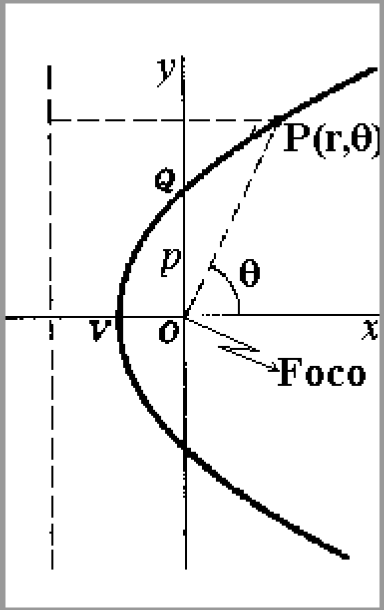
$e = 0 \rightarrow$ círculo

$0 < e < 1 \rightarrow$ elipse

$e = 1 \rightarrow$ parábola

$e >$ hipérbola

1ª Lei de Kepler



Equação para a cônica!

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\phi)}$$

$e = 0 \rightarrow$ círculo

$0 < e < 1 \rightarrow$ elipse

$e = 1 \rightarrow$ parábola

$e >$ hipérbola

2ª Lei de Kepler

Momentum angular:

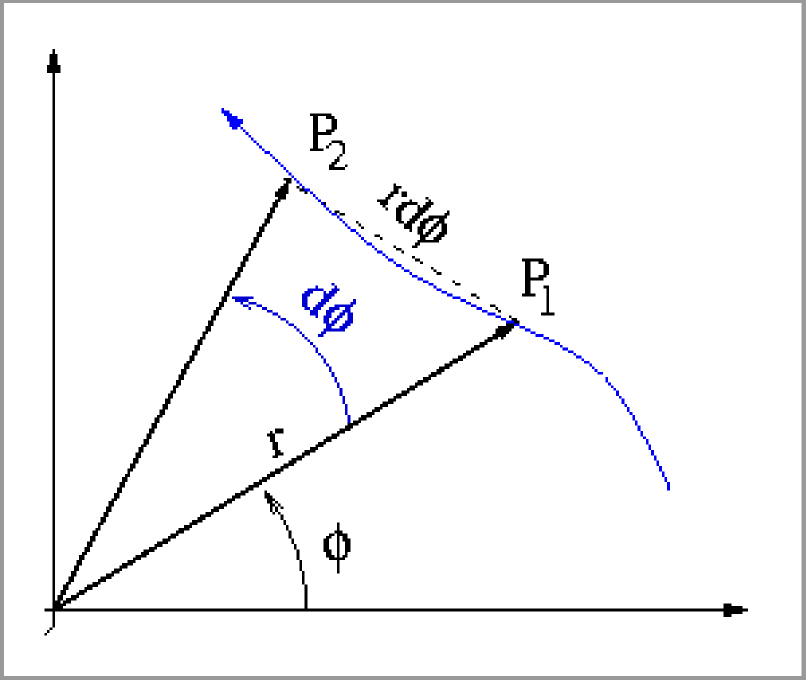
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$$

Na resolução da equação de movimento, obtém-se que ele é constante e igual a:

$$L = r^2 \dot{\phi}$$

2ª Lei de Kepler

A área percorrida em um intervalo de tempo δt é:



$$\delta A = \frac{r \cdot r \, \delta\phi}{2}$$

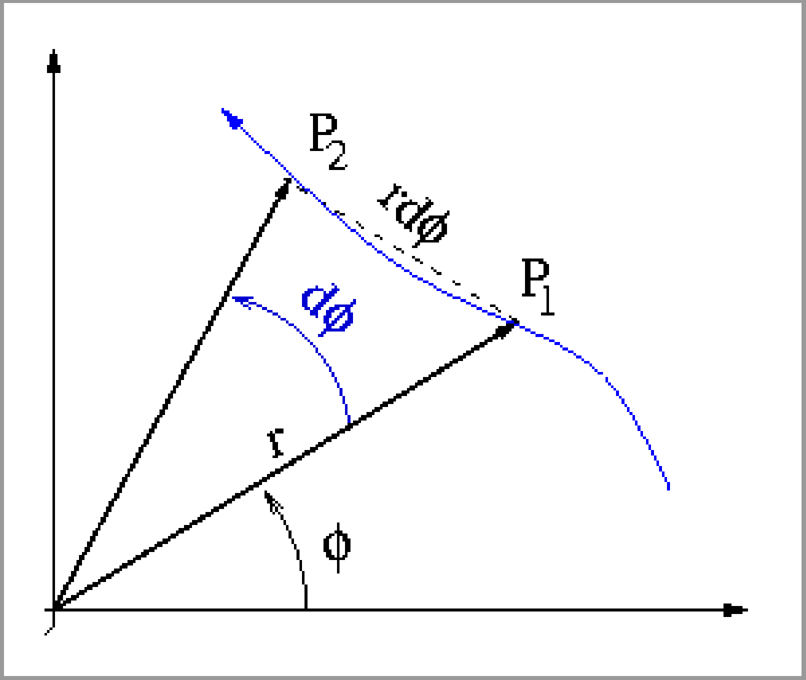
$$\frac{\delta A}{\delta t} = \frac{r \cdot r}{2} \frac{\delta\phi}{\delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\phi}}{2} = \frac{L}{2}$$

2ª Lei de Kepler

= Conservação do momento angular!

A área percorrida em um intervalo de tempo δt é:



$$\delta A = \frac{r \cdot r\,\delta\phi}{2}$$

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \frac{r \cdot r}{2}\frac{\delta\phi}{\delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{r^2\dot{\phi}}{2} = \frac{L}{2}$$ = constante!

3ª Lei de Kepler

Área de uma elipse:

$$A = \pi a b$$

Da 2ª Lei de Kepler:

$$d A = \frac{L}{2} dt$$

Integrando sobre um período P:

$$\pi a b = \frac{L}{2} P$$

3ª Lei de Kepler

O semi-eixo menor pode ser reescrito utilizando a solução da equação de movimento comparada à equação da elipse:

$$b = a\sqrt{1+e^2} = \sqrt{pa} = \sqrt{\frac{aL^2}{GM}}$$

Elevando ao quadrado e substituindo:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}a^3$$

3ª Lei de Kepler

O semi-eixo menor pode ser reescrito utilizando a solução da equação de movimento comparada à equação da elipse:

$$b = a\sqrt{1+e^2} = \sqrt{pa} = \sqrt{\frac{aL^2}{GM}}$$

Elevando ao quadrado e substituindo:

$$\boxed{P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} a^3}$$

Links

http://astro.if.ufrgs.br/Orbit/nebraska.htm